

第2章-1 ワイブル分布

1.1 正規分布と正規確率紙

[目次に戻る](#)

我々の身長や体重、「くせ」のない工程で作った製品の寸法や電気的特性が一般的に「つりがね形」の分布すなわち、**正規分布**をすることはよく知られたことである。正規分布をするデータを要約する重要なパラメータに、

- ① 平均値 …… そのデータの中心
 - ② 標準偏差 …… データのばらつきの程度(約68%のデータが $\pm 1\sigma$ の中に入る)
- の2つがある。

平均値はともかくとして、標準偏差を計算するのはかなり面倒なことである。(現在は電卓で簡単にできるが)しかし我々の先輩は、

- ① 平均値
- ② 標準偏差

をグラフで求めることができる、いわゆる**正規確率紙**を工夫してくれた。

1.2 ワイブル分布

[目次に戻る](#)

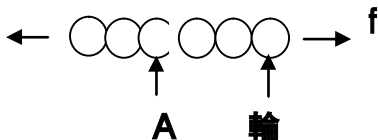
製品の寿命分布の代表的なものには、

- ① 指数分布
- ② ワイブル分布
- ③ 対数正規分布

がある。その他にガンマ分布、二重指数分布も特殊な場合に利用される。

自転車のチェーンを思い出してみたい。1本のチェーンは約150個の輪からできている。この輪の1個でも切れればチェーンの機能は停止し自転車に乗ることはできない。図1.は6個の輪(リンク:link)を鎖状(チェーン:chain)につないだものを両方からfという力で引張り、Aで切れたところである。

図1. 最弱リンクモデル



同じ条件で作ったはずの6個の輪をつないだのだが、No.3の輪のAのところが一番弱かったために引っ張る力に耐えきれず切れてしまった。**最弱リンクモデル**といわれるものである。

図2. 直列系システム



図2.はA,B,...,Fの6個の部品を直列につないだ装置である。直列系システムといわれるものである。今部品Cが壊れればシステムは働かない(機能を失う)。図1.のチェーン(最弱リンクモデル)と同じである。

このようなモデルに**ワイブル分布**はよくあてはまるといわれている。

ワイブル分布は、1949年スウェーデンの材料強度の専門家W.Weibullによって、初めて導入され、1960年前後に米国のカオ(J.H.KAO)によって実用化されたものである。

$$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^m} \quad (1)$$

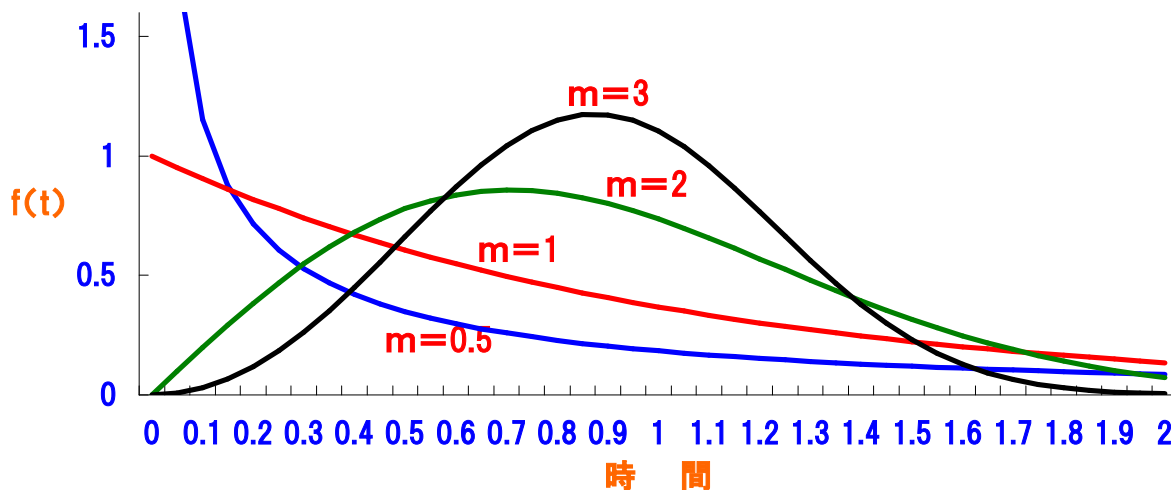
または、

$$F(t) = 1 - e^{-\frac{(t-\gamma)^m}{\alpha}} \quad (1)'$$

と表される。

ただし、 $\alpha^{1/m} = \eta$

図3. ワイブル分布の確率密度



信頼性では故障率 $\lambda(t)$ を定義して解析・検討することがある。

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} \quad (2)$$

ここで、 $f(t)$ = ワイブル分布の確率密度

$R(t) (= 1 - F(t))$ = 製品の信頼度 ($F(t)$ = 不信頼度, $R(t) + F(t) = 1$)

$$\lambda(t) = \frac{m}{\eta^m} t^{m-1} \quad (3)$$

ワイブル分布の平均

$$\mu = \eta \Gamma\left(\frac{1}{m} + 1\right) \quad (4)$$

ワイブル分布の確率密度: $f(t)$

$$f(t) = \frac{m}{\eta^m} t^{m-1} e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^m} \quad (5)$$

ただし、 $\gamma = 0$

1.3 ワイブル分布のパラメータ

[目次に戻る](#)

ワイブル分布のパラメータについて検討してみよう。ワイブル分布は(1)式に記した様に

$$(1) \text{式} \quad F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^m}$$

ワイブル分布の確率密度 $f(t)$ は、(1)式を微分すれば求められる。

$$f(t) = \frac{d}{dt} F(t) = \frac{m}{\eta} \left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{m-1} e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^m} \quad (6)$$

以下ワイブル分布の重要なパラメータについて実例を示して説明しよう。

① 形状パラメータ : m

$$(6) \text{式 } f(t) = \frac{m}{\eta} \cdot \left(\frac{t-\gamma}{\eta} \right)^{m-1} e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta} \right)^m}$$

今, $\eta = 1, \gamma = 0$ とすれば

$$f(t) = mt^{m-1} e^{-t^m}$$

表1. m と $f(t)$

| | $m=1/2$ $0.5t^{-0.5}e^{-t^{0.5}}$ | $m=1$ e^{-t} | $m=2$ $2te^{-t^2}$ | $m=3$ $3t^2e^{-t^3}$ |
|------|--------------------------------------|-------------------|-----------------------|-------------------------|
| 0.01 | 4.524 | 0.990 | 0.020 | 0.000 |
| 0.1 | 1.152 | 0.905 | 0.198 | 0.030 |
| 0.2 | 0.715 | 0.819 | 0.384 | 0.119 |
| 0.4 | 0.420 | 0.670 | 0.682 | 0.450 |
| 0.5 | 0.349 | 0.607 | 0.779 | 0.662 |
| 0.6 | 0.298 | 0.549 | 0.837 | 0.870 |
| 0.7 | 0.259 | 0.497 | 0.858 | 1.043 |
| 0.8 | 0.229 | 0.449 | 0.844 | 1.151 |
| 0.9 | 0.204 | 0.407 | 0.801 | 1.172 |
| 1.0 | 0.184 | 0.368 | 0.736 | 1.104 |
| 1.1 | 0.167 | 0.333 | 0.656 | 0.959 |
| 1.2 | 0.153 | 0.301 | 0.569 | 0.767 |
| 1.3 | 0.140 | 0.273 | 0.480 | 0.563 |
| 1.4 | 0.129 | 0.247 | 0.394 | 0.378 |
| 1.5 | 0.120 | 0.223 | 0.316 | 0.231 |
| 1.6 | 0.112 | 0.202 | 0.247 | 0.128 |
| 1.7 | 0.104 | 0.183 | 0.189 | 0.064 |
| 1.8 | 0.097 | 0.165 | 0.141 | 0.029 |
| 1.9 | 0.091 | 0.150 | 0.103 | 0.011 |
| 2.0 | 0.086 | 0.135 | 0.073 | 0.004 |

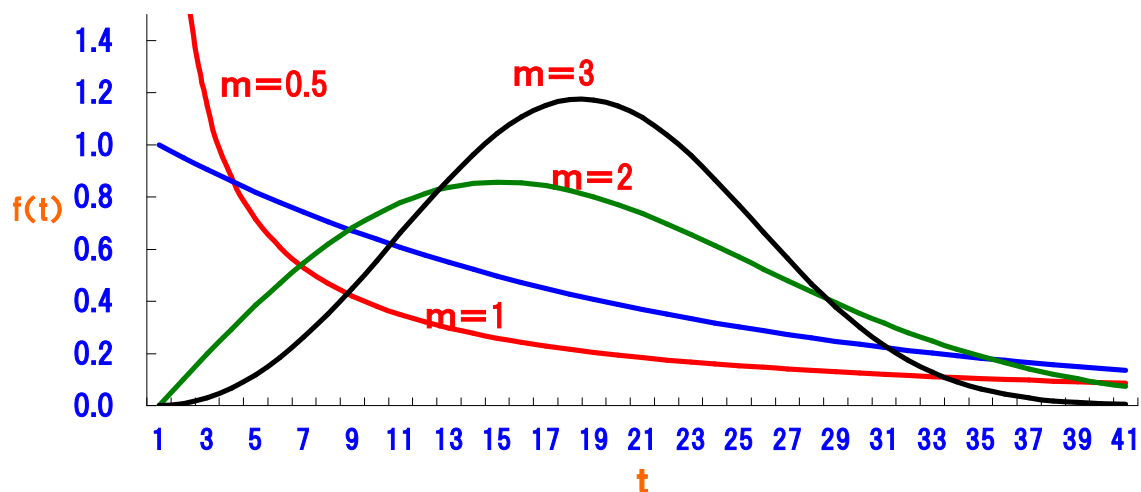
図4. m と $f(t)$ 

表1および図4より m の値によってワイブル分布の確率密度 $f(t)$ はその形状が大きく変わるので,

m : 形状パラメータ
という。

② 尺度パラメータ : η

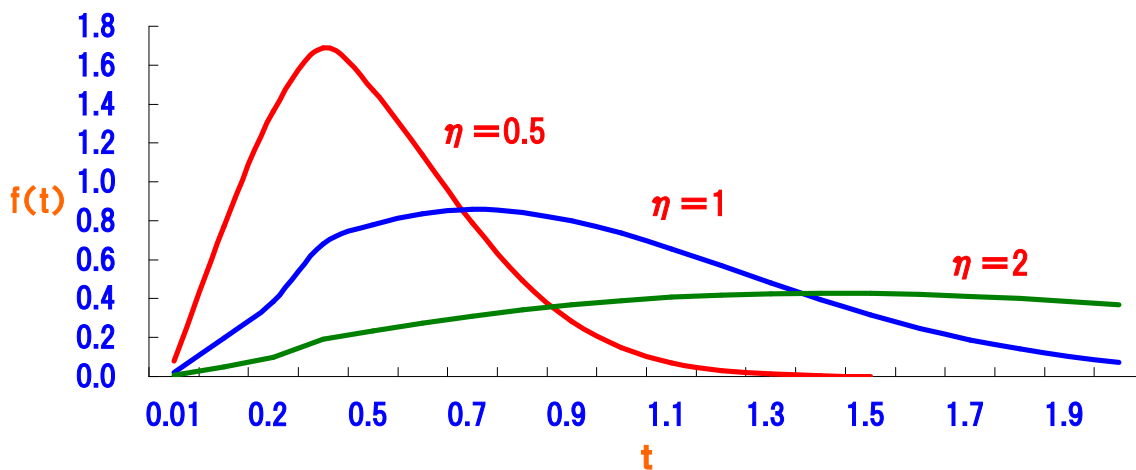
$$(6) \text{式 } f(t) = \frac{m}{\eta} \cdot \left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{m-1} e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^m}$$

今, $m=2, \gamma=0$ とすれば

$$f(t) = \frac{2}{\eta} \cdot \left(\frac{t}{\eta}\right) e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^2} = \frac{2}{\eta^2} t e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^2}$$

表2. m と $f(t)$

| | $\eta=0.5$ $8t \cdot e^{-4t^2}$ | $\eta=1.0$ $2t \cdot e^{-t^2}$ | $\eta=2.0$ $0.5te^{-(0.5t)^2}$ |
|------|------------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| 0.01 | 0.080 | 0.020 | 0.005 |
| 0.1 | 0.769 | 0.198 | 0.050 |
| 0.2 | 1.363 | 0.384 | 0.099 |
| 0.4 | 1.687 | 0.682 | 0.192 |
| 0.5 | 1.472 | 0.779 | 0.235 |
| 0.6 | 1.137 | 0.837 | 0.274 |
| 0.7 | 0.789 | 0.858 | 0.310 |
| 0.8 | 0.495 | 0.844 | 0.341 |
| 0.9 | 0.282 | 0.801 | 0.368 |
| 1.0 | 0.147 | 0.736 | 0.389 |
| 1.1 | 0.070 | 0.656 | 0.406 |
| 1.2 | 0.030 | 0.569 | 0.419 |
| 1.3 | 0.012 | 0.480 | 0.426 |
| 1.4 | 0.004 | 0.394 | 0.429 |
| 1.5 | 0.001 | 0.316 | 0.427 |
| 1.6 | | 0.247 | 0.422 |
| 1.7 | | 0.189 | 0.413 |
| 1.8 | | 0.141 | 0.400 |
| 1.9 | | 0.103 | 0.385 |
| 2.0 | | 0.073 | 0.368 |

図5. η と $f(t)$ 

$$(4) \text{式 } \mu = \eta \Gamma\left(\frac{1}{m} + 1\right)$$

$$(3) \text{式 } \lambda(t) = \frac{m}{\eta^m} t^{m-1}$$

より η^m または η が大きい(小さい)と

- { (4)式より平均寿命 μ は長く(短く)
- { (3)式より故障率 $\lambda(t)$ は小さく(大きく)

なるもで, η を尺度のパラメータという。

③ 位置パラメータ : γ

(6)式 $f(t) = \frac{m}{\eta} \cdot \left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{m-1} e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^m}$

今, $\eta = 1, m = 2$ とすれば

$f(t) = 2(t-\gamma) e^{-(t-\gamma)^2}$

表3. γ と $f(t)$

| | $\gamma = -1$ $2(t+1)e^{-(t+1)^2}$ | $\gamma = 0$ $2t \cdot e^{-t^2}$ | $\gamma = 1$ $2(t-1)e^{-(t-1)^2}$ |
|------|---------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------------|
| -1 | 0.000 | | |
| -0.8 | 0.384 | | |
| -0.6 | 0.682 | | |
| -0.4 | 0.837 | | |
| -0.2 | 0.844 | | |
| 0 | 0.736 | 0.000 | |
| 0.2 | 0.569 | 0.384 | |
| 0.4 | 0.394 | 0.682 | |
| 0.6 | 0.247 | 0.837 | |
| 0.8 | 0.141 | 0.844 | |
| 1 | 0.073 | 0.736 | 0.000 |
| 1.2 | | 0.569 | 0.384 |
| 1.4 | | 0.394 | 0.682 |
| 1.6 | | 0.247 | 0.837 |
| 1.8 | | 0.141 | 0.844 |
| 2 | | 0.073 | 0.736 |
| 2.2 | | | 0.569 |
| 2.4 | | | 0.394 |
| 2.6 | | | 0.247 |
| 2.8 | | | 0.141 |
| 3 | | | 0.073 |

図6. γ と $f(t)$

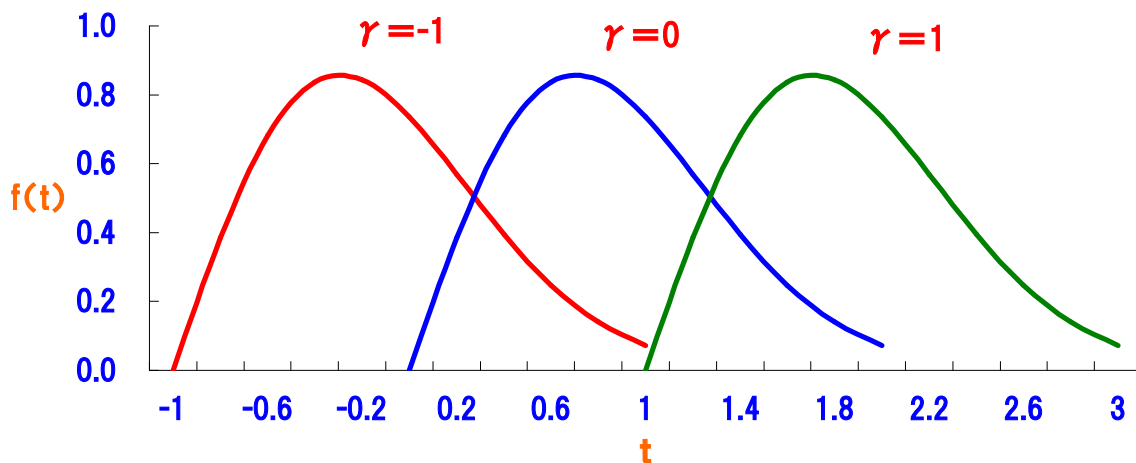


表3と図6より γ によって $f(t)$ は t 軸上を平行移動する。

$\gamma > 0$ の場合

$t = 0 \sim \gamma$ の間は故障はないと考える。

$\gamma < 0$ の場合

$t = \text{負}(-)$ の時間 ~ 0 までの間, 故障があってもとり除かれたと考える。

このように γ は故障開始の位置を示すので, γ を位置パラメータという。

1.4 ワイブル分布の特徴

[目次に戻る](#)

- ① 故障率が(3)式 $[\lambda(t) = \frac{m}{\eta^m} t^{m-1}]$ で与えられるのでmの値によって故障に対する物理的な意味が考えやすい。
- ② 先輩たちのデータ解析の経験によって、寿命分布としては比較的良好にデータにあてはまることが分かっている。
- ③ (1)式のワイブル分布の式 $[F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^m}]$ は一見複雑のように見えるが、先輩たちが使いやすいように工夫(例えば、ワイブル確率紙)してあるので、数学的知識をほとんど持たない人でも簡単に前記のワイブルパラメータ(m, η , γ)が推定できる。

1.5 ワイブル分布の数式

[目次に戻る](#)

参考までに付記しておく。

(2)式より,

$$\lambda(t) = f(t) / R(t) \quad (2)$$

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} \quad (2)'$$

または,

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{\int_t^\infty f(t) dt} \quad (2)''$$

ここで,

$$R(t) = \int_t^\infty f(t) dt$$

$$F(t) = 1 - R(t) = \int_0^t f(t) dt$$

(2)'式より

$$\lambda(t) = - \frac{\frac{d}{dt} [1 - F(t)]}{1 - F(t)}$$

両辺を0よりTまで積分すると,

$$- \int_0^T \lambda(t) dt = \ln[1 - F(t)]$$

$$F(t) = 1 - e^{-\int_0^T \lambda(t) dt}$$

$$R(t) = e^{-\int_0^T \lambda(t) dt} \quad (7)$$

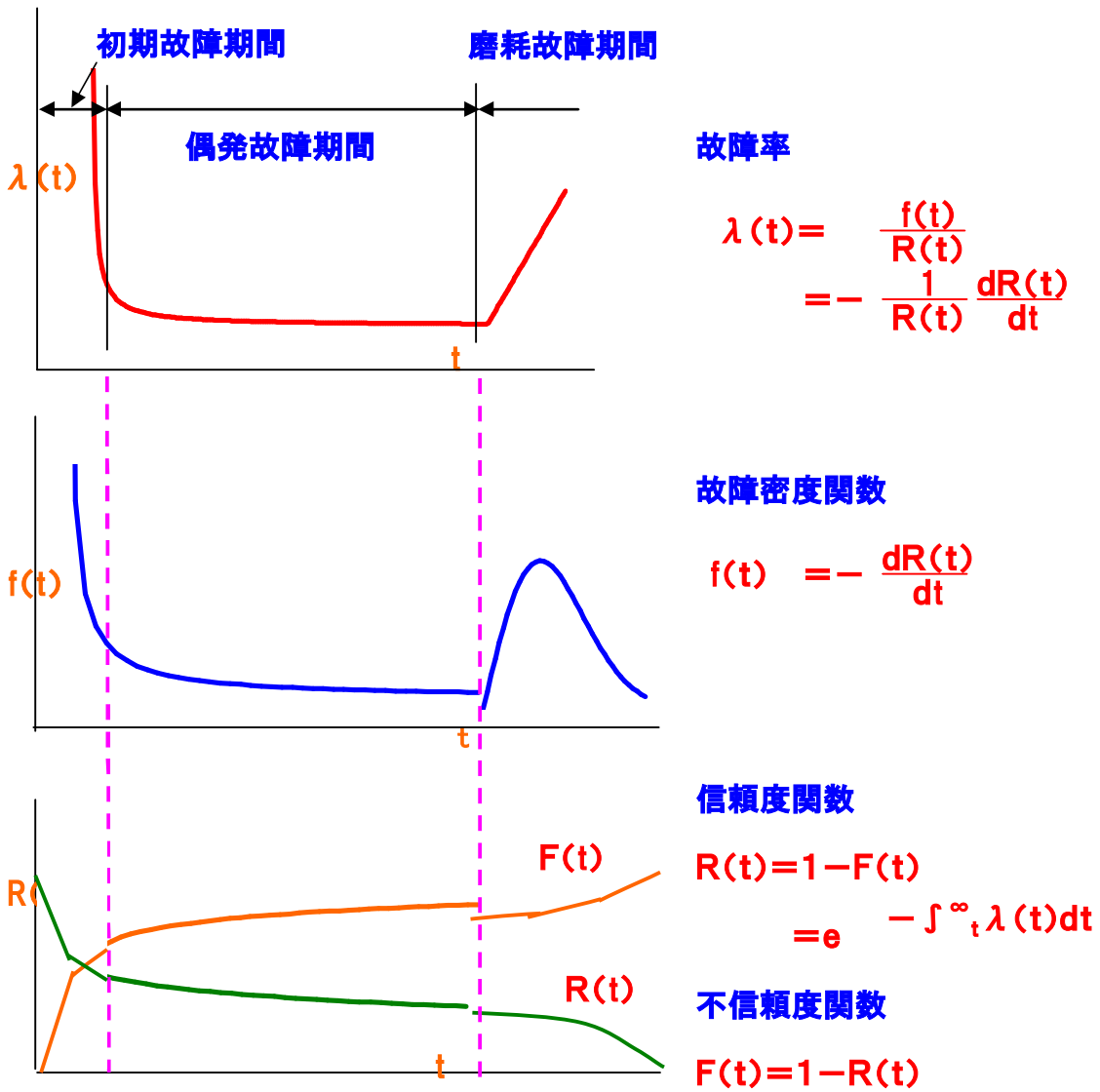
$$f(t) = \frac{d}{dt} F(t)$$

$$= \frac{d}{dt} \left(1 - e^{-\int_0^T \lambda(t) dt} \right)$$

$$= \lambda(t) e^{-\int_0^T \lambda(t) dt} \quad (8)$$

(2),(7),(8)は寿命分布と故障率の関係を示す重要な式である。
 バスタブカーブに対応する故障密度関数,信頼度(不信頼度)を図7に示す。

図7. $\lambda(t) \cdot f(t) \cdot R(t) (F(t))$ の関係



第2章-2 ワイブル確率紙

2.1 正規確率紙

[目次に戻る](#)

図7に示したように製品の不信頼度関数をグラフに示すと曲線になる。ワイブル分布に入る前になじみやすい正規分布を使って説明しておこう。

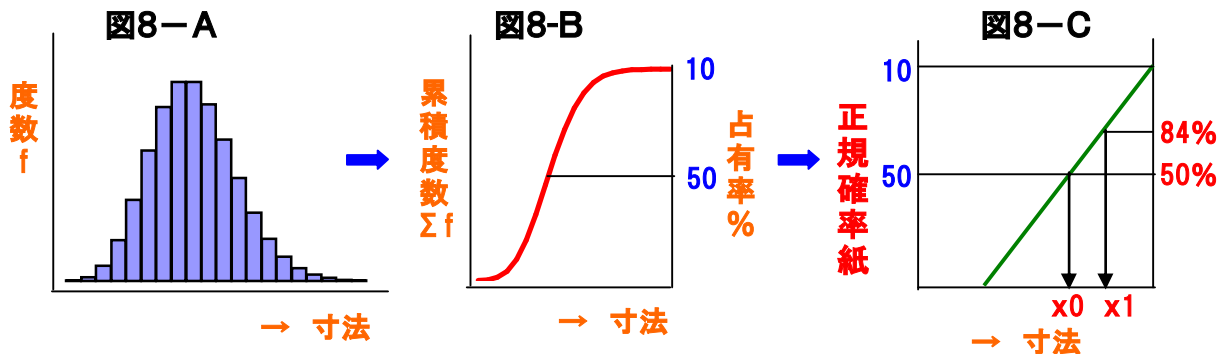


図8-A ヒストグラム
 図8-B 累積度数グラフ(累積分布関数)
 図8-C 正規確率紙のプロット(標準正規分布の累積分布関数)

図8-Cで縦軸の50%から横軸に交わるところが(x0)平均値 μ である。一方、縦軸約84%に相当する横軸の位置x1とすると $x1-x0$ =標準偏差 σ である。

2.2 ワイブル確率紙の原理

[目次に戻る](#)

ワイブル不信頼度($F(t)$)関数をグラフに描くと図9-Bに示す通り、曲線になる。この曲線が直線になるように工夫(縦軸、横軸の数値変換)したグラフ用紙がワイブル確率紙である。

$$(1)式 \quad F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^m}$$

今、 $\gamma=0$ (位置のパラメータがないとして)

$$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^m} \quad (9)$$

両辺の自然対数をとると、

$$\ln[1-F(t)] = -\left(\frac{t}{\eta}\right)^m$$

$$-\ln[1-F(t)] = \left(\frac{t}{\eta}\right)^m$$

$$\ln \frac{1}{1-F(t)} = \left(\frac{t}{\eta}\right)^m$$

もう一度自然対数をとると、

$$\ln \ln \frac{1}{1-F(t)} = m \cdot \ln\left(\frac{t}{\eta}\right)$$

$$\frac{\ln \ln \frac{1}{1-F(t)}}{Y} = \frac{m \cdot \ln t - m \cdot \ln \eta}{X \quad C}$$

$$Y = mX + C \tag{10}$$

ただし,

$$Y = \ln \ln \frac{1}{1-F(t)}$$

$$X = \ln t$$

$$C = -m \cdot \ln \eta$$

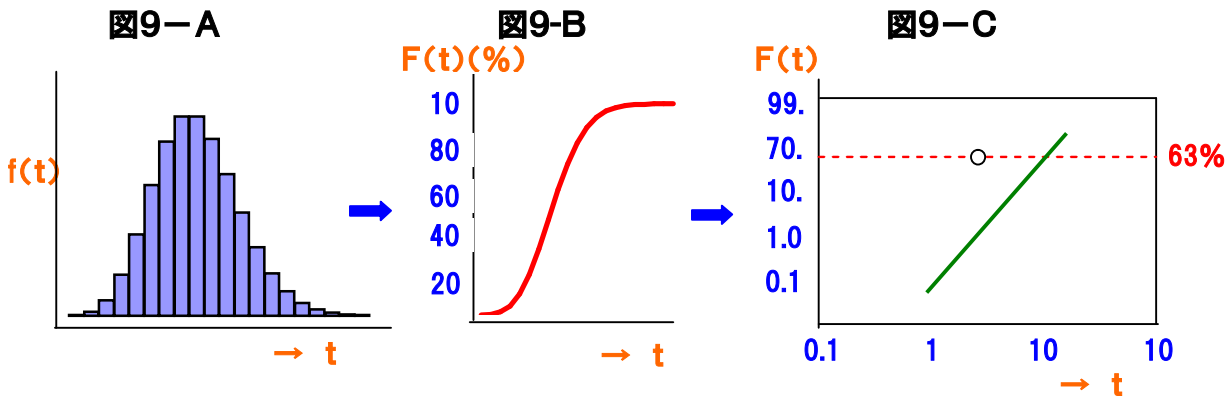


図9-A 各時間における故障数
 図9-B 累積故障率
 図9-C ワイブル確率紙にプロット

時間 t とそれに対応する $F(t)$ を図9-Cのように打点するとデータがワイブル分布の時はほぼ一直線上にならぶ。

ワイブル確率紙には、日本規格協会発行のものと日科技連の発行するワイブル型累積ハザード紙：図10参照)の2種がある。

第2章-3 ワイブル確率紙の使い方

3.1 ワイブル確率紙の作成手順

[目次に戻る](#)

サンプルが全部故障したデータを実例で説明する。

手順1. 故障データを故障時間の早い方から順にならべかえる。

A製品の信頼性データ

| サンプルNo. | 故障時間(×100H) | | サンプルNo. | 故障時間(×100H) |
|---------|-------------|---|---------|-------------|
| 1 | 12.7 | → | 8 | 3.8 |
| 2 | 21.6 | | 3 | 7.2 |
| 3 | 7.2 | | 9 | 9.5 |
| 4 | 17.3 | | 1 | 12.7 |
| 5 | 46.4 | | 7 | 15.0 |
| 6 | 26.1 | | 4 | 17.3 |
| 7 | 15.0 | | 2 | 21.6 |
| 8 | 3.8 | | 6 | 26.1 |
| 9 | 9.5 | | 10 | 31.9 |
| 10 | 31.9 | | 5 | 46.4 |

手順2. 不信頼度の計算をする。

- | | | |
|-----------|---------------------|----------|
| ① 単純計算 | $F=r/n$ | r: 累積故障数 |
| ② 平均ランク | $F=r/(n+1)$ | |
| ③ メジアンランク | $F=(r-0.3)/(n+0.4)$ | n: サンプル数 |
| ④ モードランク | $F=(r-1)/(n-1)$ | |

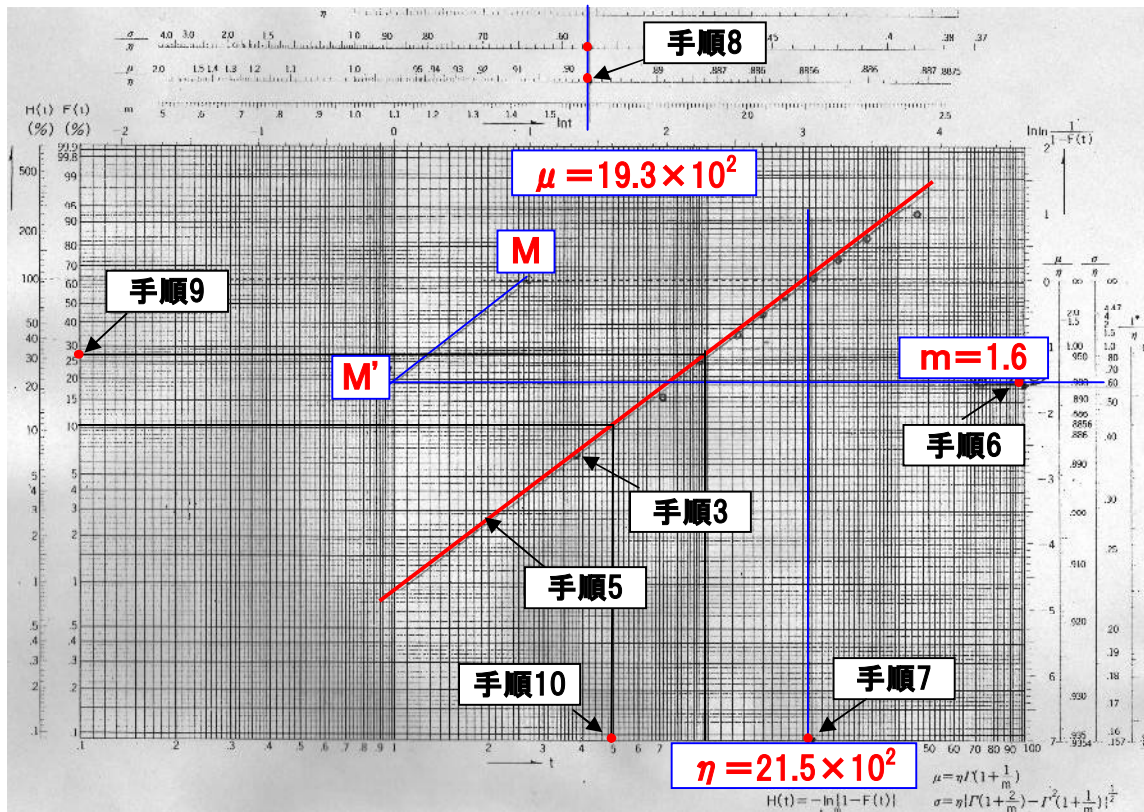
| サンプル No. | 累積 故障数 | 故障 時間 | 単純計算 | 平均ランク | メジアンランク | モードランク |
|-------------|-----------|----------|------|-------|---------|--------|
| | | | % | | | |
| 8 | 1 | 3.8 | 10 | 9.1 | 6.7 | 0.0 |
| 3 | 2 | 7.2 | 20 | 18.2 | 16.3 | 11.1 |
| 9 | 3 | 9.5 | 30 | 27.3 | 26.0 | 22.2 |
| 1 | 4 | 12.7 | 40 | 36.4 | 35.6 | 33.3 |
| 7 | 5 | 15.0 | 50 | 45.5 | 45.2 | 44.4 |
| 4 | 6 | 17.3 | 60 | 54.5 | 54.8 | 55.6 |
| 2 | 7 | 21.6 | 70 | 63.6 | 64.4 | 66.7 |
| 6 | 8 | 26.1 | 80 | 72.7 | 74.0 | 77.8 |
| 10 | 9 | 31.9 | 90 | 81.8 | 83.7 | 88.9 |
| 5 | 10 | 46.4 | 100 | 90.9 | 93.3 | 100.0 |

手順3. ワイブル確率紙にプロットする。(メジアンランクでプロットした例を示す。)

図10 ワイブル型累積ハザード紙(日科技連)

- ハザード紙はF(t)の目盛が左側に打ってあるので注意。

図10



手順4. 直線であてはめられるかチェックする。

手順5. 直線があてはめられるようであったら直線をひく。

30~80%の点に注目する。

手順6. m(形状パラメータ)の推定

- ① あてはめた直線を平行移動して、M点(O印, $\ln t = 1, \ln H(t) = 0$)に合わせる。
- ② 平行移動した線と $\ln t = 0$ の線の交点(M')より直線を右に引いてゆく。
- ③ Y軸の読みに(-1)を乗じたものがmである。
- ④ 例題では $m = 1.6$

$$\left(\begin{array}{l} \text{M点} (\ln t = 1, \ln H(t) = 0) \\ \text{M'点} (\ln t = 0, Y) \\ \text{M} - \text{M}' = 1 (X = 1) \\ m = (-1)Y / X = -(0 + Y) / 1 \\ \quad \quad \quad = -Y \end{array} \right)$$

手順7. η(尺度のパラメータ)の推定

- ① 直線がU軸と交わった点を直下に引いてくる。
- ② t軸と交わるところがηである。
- ③ 例題では $\eta = 21.5 (\times 100H)$

手順8. 平均寿命μの推定

- ① 右側の補助尺の μ / η を使う。
- ② mを求めるために引いた線を μ / η の補助尺まで伸ばす。
- ③ 交わったところが μ / η の値A
例題では $A = 0.898$

④ $\mu / \eta = A$
 $\mu = A \times \eta$ (μ は手順7で求めた)

例題では
 $\mu = 0.898 \times 21.5 = 19.3$ ($\times 100H$)

手順9. 任務時間 t_0 における信頼度の推定

- ① 求めたい任務時間: t_0 を t 軸にとり,これより線を上に伸ばし,あてはめた直線に交わせる。
 $t_0 = 10$ ($\times 100H$)
- ② この交点より左に伸ばし $F(t)$ を読む[= $F(t_0)$]
 $F(t_0) = 26.0\%$
- ③ 求める信頼度 $R(t_0)$ は,
 $R(t_0) = 1 - F(t_0)$

手順10. セーフライフの推定

- ① 例えばB10ライフ(Bテンライフ…不信頼度 $F(t)$ が10%となる t の値)の推定
- ② $F(t) = 10\%$ より右に伸ばしあてはめた直線にあてる。
- ③ 直線より t 軸に直線を伸ばし t 軸の値を読む。これがB10ライフである。
 B10ライフ = $5.1 \times (100H)$

3.2 ワイブル関数に位置パラメータ(γ :ガンマ)が存在する場合 [目次に戻る](#)

(1) 位置のパラメータ(γ)が存在する場合の故障率関数

γ については既に1.3(3)項で述べた。

(3)式より
$$\lambda(t) = \frac{m}{\eta^m} t^{m-1}$$

γ が存在するのだから,

$$\lambda(t) = \frac{m}{\eta^m} (t - \gamma)^{m-1}$$

図6を再出すると,次の通りである。

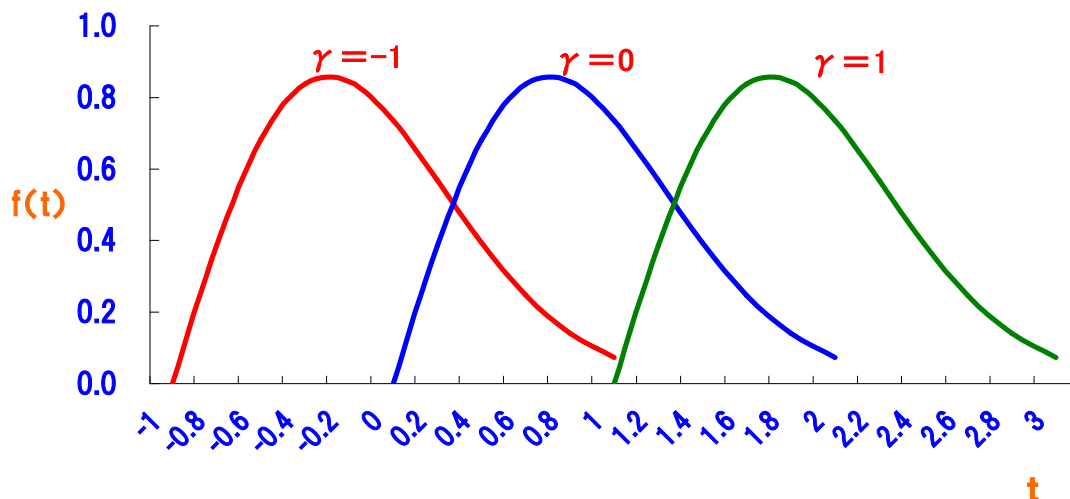
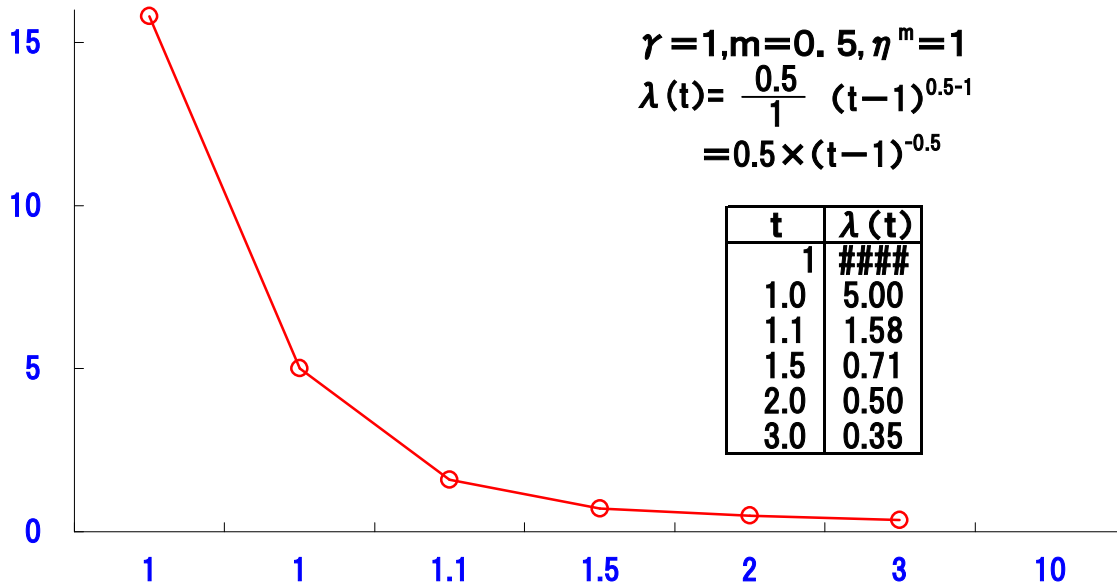


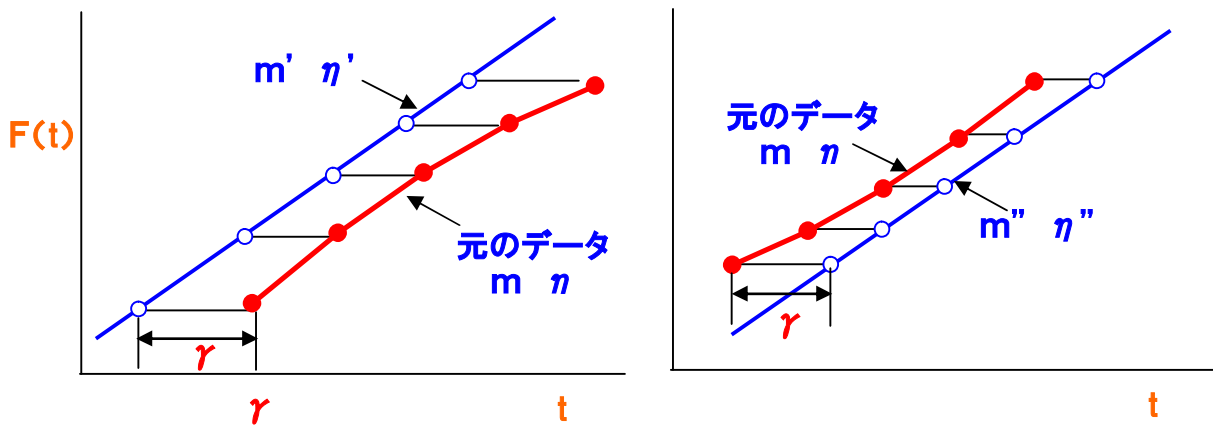
図11. γ が存在する場合の故障密度関数



(2) ワイブル確率紙上での形状 — γ がある場合—

図12-A $\gamma > 0$ の場合

図12-B $\gamma < 0$ の場合



- ① 図12-Aの様に上に凸の曲線になる場合は正の γ が存在する。
 - ② 図12-Bの様に下に凸の曲線になる場合は負の γ が存在する。
- カットアンドトライで、
- ①' 元のデータから適当な値(γ)を引き直線に回帰し、 m', η' を求める。
 - ②' 元のデータに適当な値(γ)を加え直線に回帰し、 m'', η'' を求める。
- 回帰直線のワイブルパラメータを m', η' (m'', η'')とすると

$$\begin{cases} m = m' \\ \eta = \eta' + \gamma \\ \mu = \mu' + \gamma \end{cases}$$

となる。

表4-A ($r > 0$)

| 元のデータ (x) | 元のデータより[-2.4] (x-2.4) |
|--------------|--------------------------|
| 4.6 | 2.2 |
| 6.6 | 4.2 |
| 8.4 | 6 |
| 10.2 | 7.8 |
| 11.9 | 9.5 |
| 13.6 | 11.2 |
| 16.4 | 14 |
| 19.3 | 16.9 |
| 22.7 | 20.3 |
| 29.4 | 27 |

表4-B ($r < 0$)

| 元のデータ (x) | 元のデータより[+1] (x+1) |
|--------------|----------------------|
| 0.9 | 1.9 |
| 1.9 | 2.9 |
| 2.9 | 3.9 |
| 3.7 | 4.7 |
| 4.5 | 5.5 |
| 5.3 | 6.3 |
| 6.2 | 7.2 |
| 7.1 | 8.1 |
| 8.2 | 9.2 |
| 11.1 | 12.1 |

図13-A ($r > 0$ の場合)

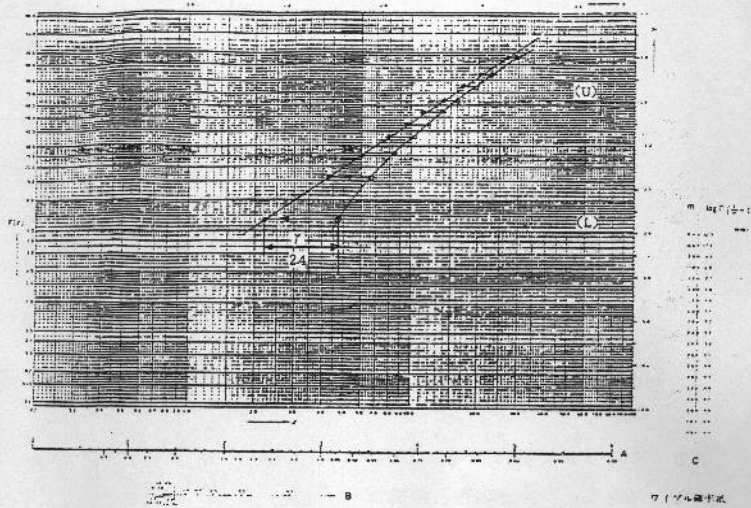
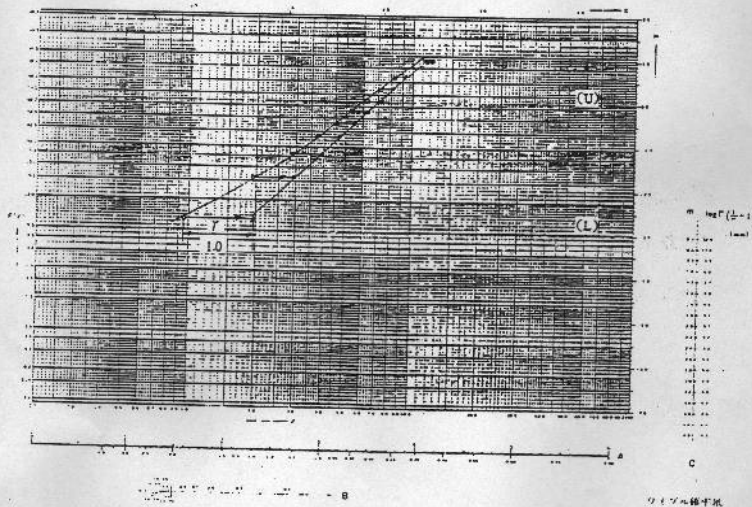
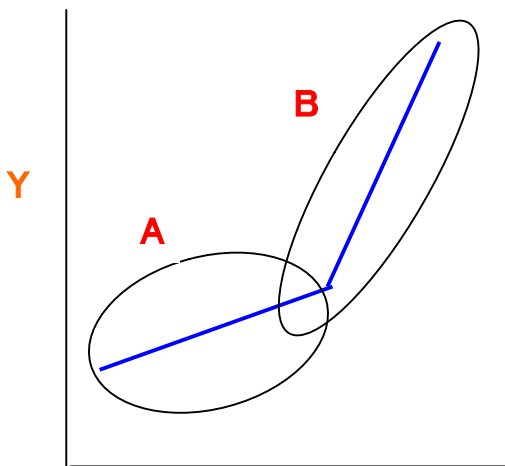


図13-B ($r < 0$ の場合)



(3) 折れ曲がった2本の直線になる場合



ワイブル確率紙にプロットした後で直線をあてはめようとしても、図のようにうまくあてはまらない時がある。
 左図のように直線があてはまらない場合、AとBは明らかにちがう故障である。
 考えられることは、
 1) 初期故障,偶発故障,磨耗故障の3つが混在している。
 2) モードのちがう故障,例えばオープンモード,ショートモードの混在
 3) 試験条件の設定ミス。
 などが上げられよう。
 故障解析をやって,もう一度検討し直すことを進めたい。

3.3 ワイブル解析の応用

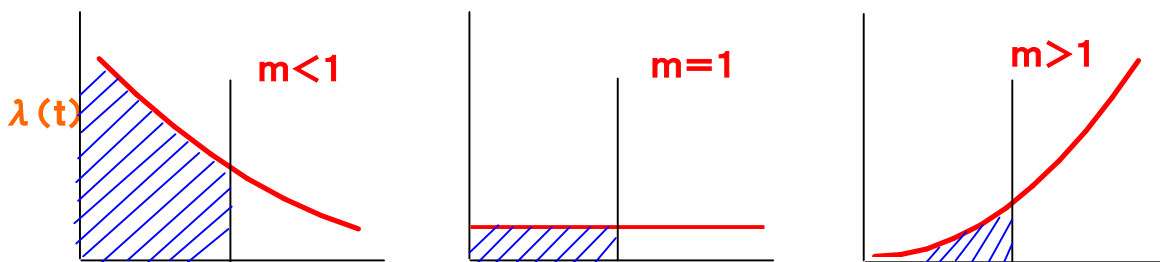
[目次に戻る](#)

(1) スクリーニングの可否の検討

図14-A

図14-B

図14-C

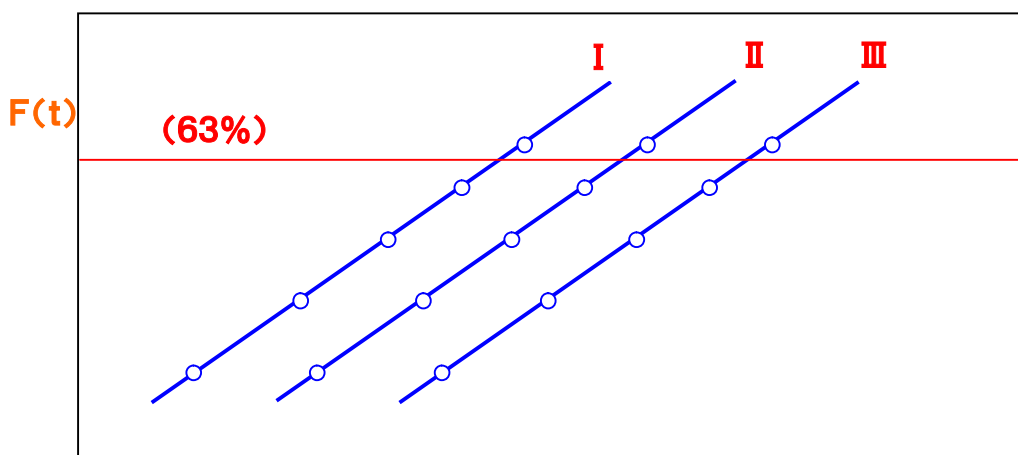


形状のパラメータ m によって $\lambda(t)$ の様子は違うことは図14に示す通りである。

- ① $m < 1$ は $\lambda(t)$ は時間(回数)と共に収束する方向にあるから,スクリーニングが可能である。
- ② $m = 1$ は $\lambda(t)$ が時間に関係なく一定であるから効果がない。
- ③ $m > 1$ は $\lambda(t)$ が時間と共に増加するから逆効果でスクリーニングは絶対に不可である。

(2) 加速係数を求める

図15



試験条件

| | | |
|-----|------|-------|
| I | 80°C | 90%RH |
| II | 60°C | 90%RH |
| III | 40°C | 90%RH |

- ① 試験条件を図15のように3水準にとってテストして、ワイブル紙上のプロットする。
- ② mが同一である場合は下記によって加速係数を求めることができる。
(mが違う時はモードが異なるので注意が必要)

加速係数 AL

$$AL = \frac{\mu_{III}}{\mu_I}$$

80°C90%RHが40°C90%RHに対して何倍の加速になっているか。

第2章-4 ワイブル型累積ハザード紙の使い方

4.1 ワイブル型累積ハザード紙の原理

[目次に戻る](#)

(1) ハザードの考え方

製品がこわれることを表現するのに、


① 元の台数に対し、今までに何台こわれたか？

ということも大切だが、

② 元の台数もさることながら、今、現に市場で使われている台数に対し、今日(今月、今年)何台(何%)こわれるか？

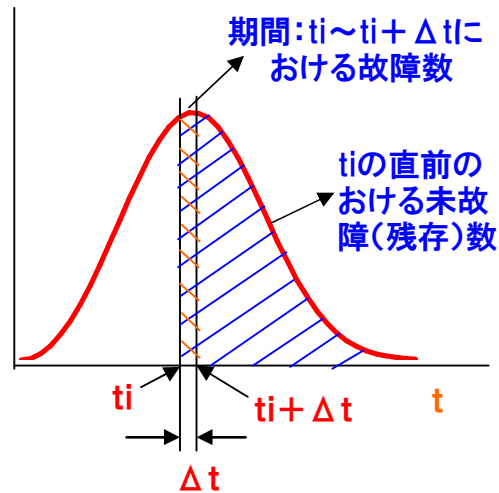
という表現の仕方も大切である。

(今年70才の人が、何%死亡するかという表現がある…)

今、ある製品の故障が図18になっていたとする。  で描いたところは単位期間 Δt における故障台数である。図18では初期の故障数は少なく、徐々に増加し、再び台数は減る。

上記②の表現の仕方に従い、時点 t_i における故障率: $\lambda(t)$

図18 故障率(ハザード)の考え方



$$\lambda(t_i) \cdot \Delta t = \frac{\text{期間}(t_i, t_i + \Delta t) \text{ における故障数}}{t_i \text{ の直前における未故障(残存)の台数}} \quad (10)$$

という表現を使おうというものである。

これは、要するに t_i から $(t_i + \Delta t)$ までの Δt の期間にこわれた台数を t_i で働いていた台数で割った値である。

この $\lambda(t_i)$ を時点 t_i における【ハザード(故障率)関数】という。

式(10)で Δt を0に近づけてゆけば瞬間、瞬間のハザードになり、これを加え合わせれば、当然【累積ハザード(H)】になる。

つまり、 $H(t) = \int_0^t \lambda(t) dt$ となる。

1.5節の式(6)~(8)を利用すると次のようになる。

まず、式(10)は

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} \quad (\doteq \frac{t_i \text{ における故障数}}{t_i \text{ における残存数}} \leftarrow \text{②}) \quad (11)$$

$$R(t) + F(t) = 1 \quad \text{より} \quad F(t) = 1 - R(t)$$

この両辺を t で微分すると

$$-\frac{d}{dt} F(t) = -\frac{d}{dt} R(t)$$

一方、 $-\frac{d}{dt} F(t) = f(t)$ (または、 $\int_0^t f(t) dt = F(t)$) であるから

これを式(11)に代入すれば

$$\lambda(t) = \frac{-\frac{d}{dt} R(t)}{R(t)} \quad (12)$$

式(12)の両辺を t について積分すれば,

$$\int_0^t \lambda(t) dt = - \int_0^t \frac{\frac{d}{dt} R(t)}{R(t)} \cdot dt$$

$$= -\ln R(t)$$

$$R(t) = e^{-\int_0^t \lambda(t) \cdot dt}$$

これは式(7)に示したものである。
ここで

$$\int_0^t \lambda(t) dt = H(t) \quad (13)$$

この $H(t)$ を{累積ハザード関数}という。

(2) $H(t)$ と $F(t)$ の関係

式(13)を式(7)に代入すれば

$$R(t) = e^{-H(t)} \quad (14)$$

一方, $R(t) = 1 - F(t)$ を式(14)に代入すると

$$1 - F(t) = e^{-H(t)}$$

$$F(t) = 1 - e^{-H(t)} \quad (15)$$

$$e^{-H(t)} = 1 - F(t) \quad (15)'$$

式(15)の,

左辺; $F(t)$ は累積故障率(ワイブル紙に利用)

右辺; $1 - e^{-H(t)}$ の $H(t)$ は前記累積ハザードであって、ハザード紙に使用する。

式(15)'の両辺を自然対数をとると,

$$H(t) = -\ln[1 - F(t)] \quad (16)$$

表5. $F(t)$ と $H(t)$

| $F(t)$ | $H(t)$ |
|----------------|--------------|
| 10%(0.1) → | 0.105(10.5%) |
| 20%(0.2) → | 0.223(22.3%) |
| 30%(0.3) → | 0.357(35.7%) |
| 0.329(32.9%) ← | 40%(0.4) |
| 0.393(39.3%) ← | 50%(0.5) |
| 0.632(63.2%) ← | 100%(1.0) |
| 0.865(86.5%) ← | 200%(2.0) |

要するにある時点 t での $H(t)$ が与えられれば(15)式より $F(t)$ が、逆に $F(t)$ が分かっていると(16)式より $H(t)$ が求められる。

($H(t)$ と $F(t)$ は同じもの……1:1の関係があるという)

つまりワイブル紙とハザード紙は縦軸の目盛りこそ違え機能的には全く同じものであることが分かる。

(3) ハザード紙の原理

$$(1) \text{式より, } F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^m}$$

$$\gamma = 0 \text{とすれば, } F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^m}$$

$$\text{一方(15)式より, } F(t) = 1 - e^{-H(t)}$$

この2つより,

$$e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^m} = e^{-H(t)} \quad (17)$$

$$H(t) = \left(\frac{t}{\eta}\right)^m \quad (18)$$

両辺の自然対数をとると,

$$\begin{aligned} \frac{\ln H(t)}{Y} &= m \ln \left(\frac{t}{\eta} \right) \\ &= \frac{m \ln t}{X} - \frac{m \ln \eta}{C} \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \ln H(t) = Y \\ \ln t = X \\ -m \ln \eta = C \end{array} \right.$$

とすると,

$$Y = mX + C \quad (19)$$

(19)式は(10)式と全く同じである。

(4) ハザード紙とワイブル紙の対比

- ① 縦軸 ハザード : $\ln H(t)$
 ワイブル : $\ln \ln \frac{1}{1-F(t)}$
- ② 横軸 $\ln t$ で同じ。

ハザード紙は $\log - \log$ つまり両対数のグラフ用紙そのものである。

注) [表5.参照,例えば, $F(t) = 0.632$ (63.2%)のところは $H(t) = 1.0$ (100%)である。]

4.2 ワイブル型累積ハザード紙の作成手順

[目次に戻る](#)

手順1. データを時間の早い方から並べる。

| サンプルNo. | 故障時間(×100H) |
|---------|-------------|
| 1 | 0.2 |
| 2 | 16.0 |
| 3 | 1.0 |
| 4 | 1.5 (紛失) |
| 5 | 30.0 |
| 6 | 2.7 |
| 7 | — |
| 8 | 11.0 |
| 9 | 1.5 (紛失) |
| 10 | 5.1 |

→

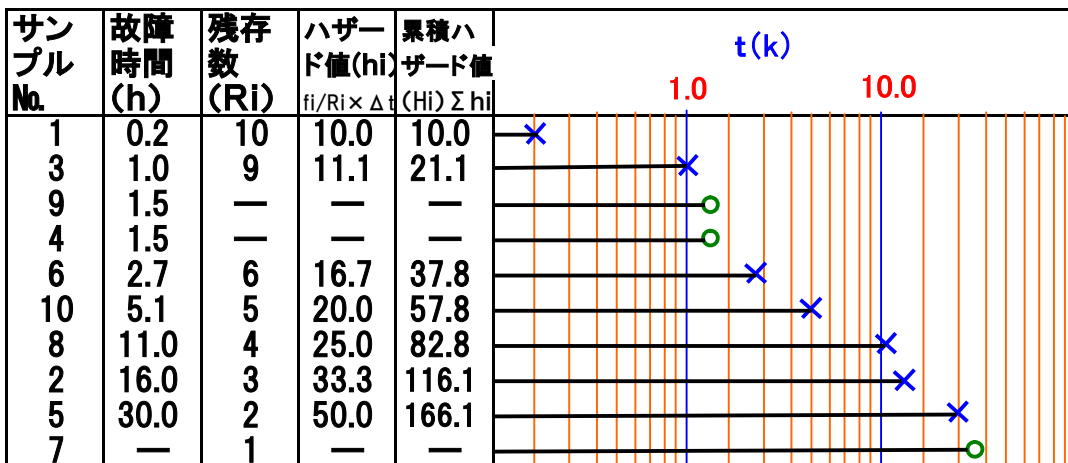
| サンプルNo. | 故障時間(×100H) |
|---------|-------------|
| 1 | 0.2 |
| 3 | 1.0 |
| 9 | 1.5 |
| 4 | 1.5 |
| 6 | 2.7 |
| 10 | 5.1 |
| 8 | 11.0 |
| 2 | 16.0 |
| 5 | 30.0 |
| 7 | — |

〔 No.4,9は1.5(×100H)で紛失
No.7は故障しなかった。 〕

手順2. ハザード値の計算

$$h_i = \frac{f_i}{R_i} (\%)$$

- ① No.1は0.2(×100H)で故障
故障する直前の残存数 R1=10個 $h_1 = 1/10 = 10.0\%$
- ② No.3は1.0(×100H)で故障
故障する直前の残存数 R2=9個 $h_2 = 1/9 = 11.1\%$
- ③ No.6は2.7(×100H)で故障
故障する直前の残存数 R3=6個 $h_3 = 1/6 = 16.7\%$
- ④ 以下同じ

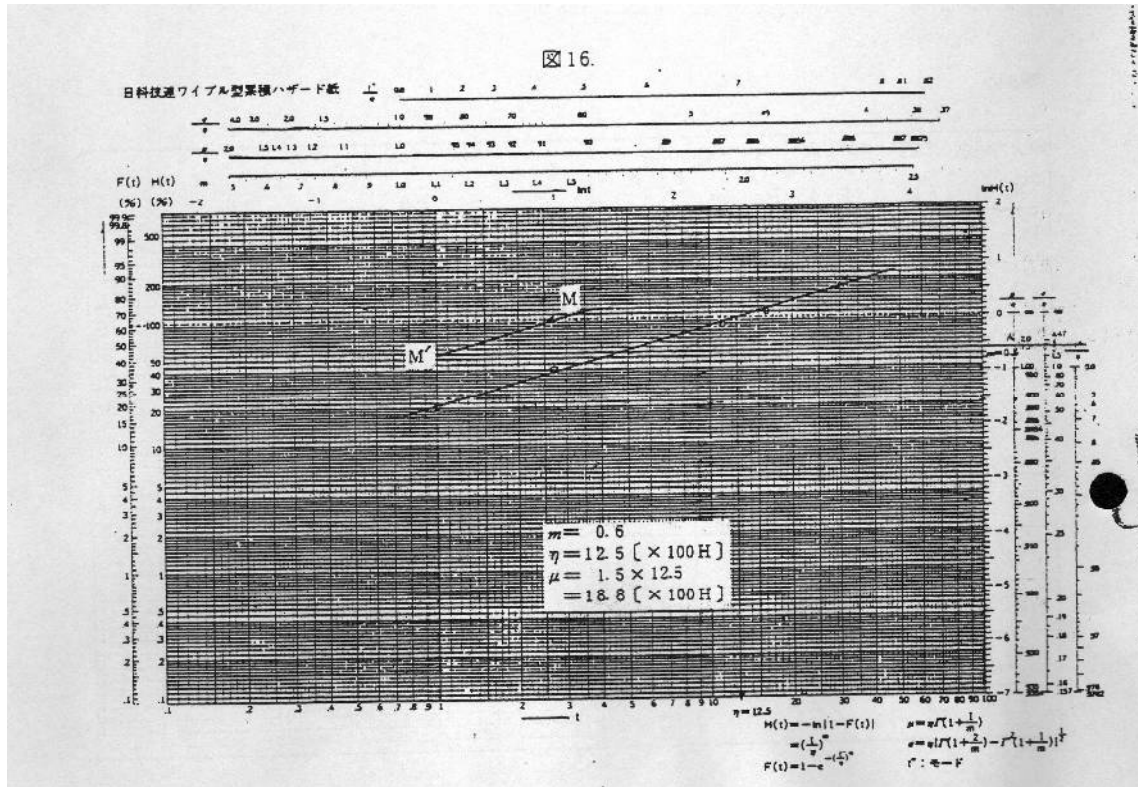


手順3. 累積ハザード値の計算

$$H_i = \sum h_i$$

- ① No.3 $H_2 = h_1 + h_2 = 10 + 11.1 = 21.1(\%)$
- ② No.6 $H_3 = h_1 + h_2 + h_3 = H_2 + h_3 = 21.1 + 16.7 = 37.8(\%)$
- ③ 以下同じ

手順4. ワイブル型累積ハザード紙にプロットする。



手順5. 形状パラメータ(m)の推定

3. 1節ワイブル確率紙の作成手順6と同じ

手順6. 尺度のパラメータ(η)の推定

上記手順7に同じ

手順7. 平均寿命(μ)の推定

上記手順8に同じ

4.3 ハザード解析の応用

[目次に戻る](#)

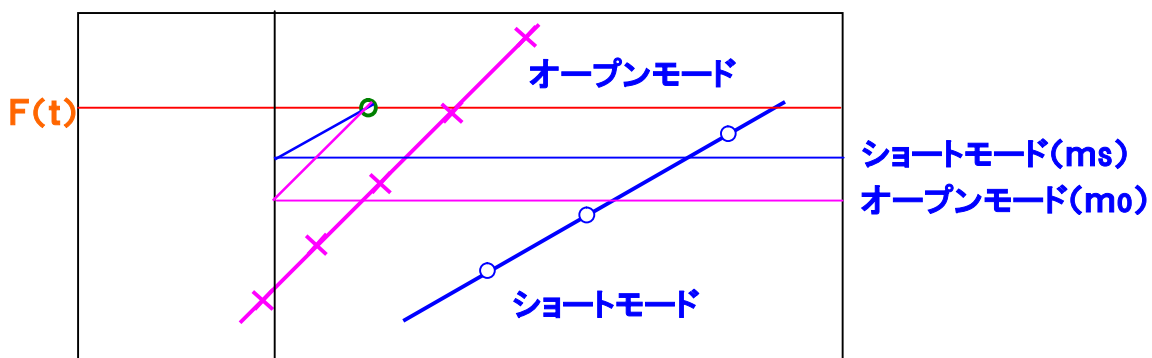
(1) モードが2つある時の解析

4. 2節ではサンプルが紛失した例で説明したが、

- ① オープンモード ×
- ② ショートモード ○

と層別して、4. 2節と同様に行えば良い。

図17. 故障モードが2つの場合



オープンモードによる m_0, η_0, μ_0
 ショートモードによる m_s, η_s, μ_s
 をそれぞれ算出して対策をとるのである。

(2) 新工法検討のためのワイブル型ハザード解析

〔検討事項〕 工法が3つの場合

ある電子部品の品質向上を目的に新工法を検討した。新工法の案には I, II が上り, 早速サンプルが作られた。従来工法との対比をするため約100倍の加速テストを行い(各サンプル共 $n=100$ 個), 下記のデータを得た。故障モードには, A, B, C の3つがあるが, 今回は特に故障Aにだけ着目したい。

各サンプル共 $n=100$

| サンプル | 時間(×100H) | 1 | 2 | 5 | 10 | 25 | 40 |
|--------|-----------|----|----|----|----|----|----|
| 現行 | モード A | 28 | 15 | 14 | | | |
| | 故障数 B | 12 | 12 | - | | | |
| | C | - | 7 | 12 | | | |
| | 計 | 40 | 34 | 26 | | | |
| 新工法 I | モード A | - | 11 | 12 | 6 | - | |
| | 故障数 B | 2 | 23 | 7 | 3 | - | |
| | C | - | 9 | 16 | 10 | 1 | |
| | 計 | 2 | 43 | 35 | 19 | 1 | |
| 新工法 II | モード A | | - | 5 | 5 | 1 | - |
| | 故障数 B | | 21 | 39 | 20 | 1 | 3 |
| | C | | - | - | - | - | - |
| | 計 | | 21 | 44 | 25 | 2 | 3 |

手順1. ハザード値の計算

$$h_i = \frac{\text{Aモードの故障数}}{\text{各時間におけるサンプル数}}$$

現行の1(×100H)では $h_1 = 28/100 = 28\%$
 現行の2(×100H)では $h_2 = 15/60 = 25\%$
 現行の5(×100H)では $h_5 = 14/26 = 53.8\%$

新工法 I の1(×100H)では $h_{I1} = 0/100 = 0$
 新工法 I の2(×100H)では $h_{I2} = 11/98 = 11.2\%$
 新工法 I の5(×100H)では $h_{I5} = 12/55 = 21.8\%$
 新工法 I の10(×100H)では $h_{I10} = 6/20 = 30\%$

新工法 II の5(×100H)では $h_{II5} = 5/79 = 6.3\%$
 新工法 II の10(×100H)では $h_{II10} = 5/35 = 14.2\%$
 新工法 II の25(×100H)では $h_{II25} = 1/10 = 10\%$

手順2. 累積ハザードの計算

$$H = \sum h_i$$

| | | 1 | 2 | 5 | 10 | 25 | 40 |
|----|-------|------|------|------|------|------|----|
| 現行 | h_i | 28.0 | 25.0 | 53.8 | | | |
| | H | 28.0 | 53.0 | ### | | | |
| I | h_i | 0.0 | 11.2 | 21.8 | 30.0 | | |
| | H | | 11.2 | 33.0 | 63.0 | | |
| II | h_i | | | 6.3 | 14.2 | 10.0 | |
| | H | | | 6.3 | 20.5 | 30.5 | |

手順3. ワイブル型累積ハザード紙にプロットする。
tとHの目盛り(内側)を使う。 図18.を参照

手順4. mを求める。
1. 3節の手順6.に従う。

| | | | |
|----|-----|-----|-----|
| 工法 | 現行 | I | II |
| m | 0.9 | 1.0 | 1.2 |

手順5. ηを求める。
1. 3節の手順7,8に従う。

| | | | |
|----|-----|------|------|
| 工法 | 現行 | I | II |
| η | 4.0 | 14.5 | 41.0 |

手順6. μの算出

- 補助尺よりμ/ηを求める。
m=0.5~2.5は上の補助尺を使うとよい。
- μ=(μ/η)×ηより算出する。

| | μ/η | η | μ=(μ/η)×η |
|----|------|------|-----------|
| 現行 | 1.05 | 4.0 | 4.2 |
| I | 0.99 | 14.5 | 14.36 |
| II | 0.95 | 41.5 | 39.43 |

手順7. σの算出

- 補助尺よりσ/ηを求める。
- σ=(σ/η)×ηより算出する。

| | σ/η | η | σ=(σ/η)×η |
|----|------|------|-----------|
| 現行 | 1.17 | 4.0 | 4.68 |
| I | 0.96 | 14.5 | 13.92 |
| II | 0.82 | 41.5 | 34.03 |

手順8. 結果の検討

μにおいて 新工法 I は約3倍,
新工法 II は約9倍,
改善されると判断する。
ただし,他の故障モードとの兼ね合いはここでは別とした。

図18.

